**Funções de uma variável real a valores em Rn**

Sejam A ⊂ R e α uma função tal que α:

R −→ Rn

t −→ α(t)

Vamos interpretar essas funções como uma regra que associa a cada número real de A uma única n−upla.



Exemplo 1: α(t) = (t, t2 )

x(t) = t

y(t) = t2 α : R −→ R2

t −→ (t, t2)

Exemplo 2: α(t) = (cost, sen t, t/4), t ≥ 0

α : [0, +∞) −→ R3

t −→ (cos t, sen t, t/4)

Toda função α: A ⊂ R −→ Rn é dada por

α(t) = (x1(t), x2(t), ..., xn(t))

Quando n = 2, escrevemos (x(t), y(t)).

Quando n = 3, escrevemos (x(t), y(t), z(t)).

As funções x1(t), x2(t), ..., xn(t) são chamadas de funções componentes de α.

Uma função α : A ⊂ R −→ Rn pode também ser interpretada como uma função que a cada t ∈ A associa ao vetor α(t). Neste caso, dizemos que α é uma função vetorial.



**Domínio**

Quando, para uma função α, especificamos o subconjunto de R no qual devemos tomar t, o domínio Dα de α é esse tal subconjunto.

Exemplos:

a) α(t) = (cos t, sen t), 0 ≤ t ≤ 2π

Dα = [0, 2π]

b) γ(t) = (t, t2 , 2t + t2), t ≥ 0

Dγ = [0, +∞)

Quando não é especificado um tal subconjunto, tomamos como o domínio de α o "maior" subconjunto possível de R no qual todas as funções componentes de α podem ser calculadas. Portanto,

Dα = Dx1 ∩ Dx2 ∩ ... ∩ Dxn

**Imagem**

Seja α : R −→ Rn uma função. O conjunto imagem Imα de α é dado por

Imα = {α(t) ∈ Rn; t ∈ Dα}

Quando n = 2 ou n = 3, podemos representar (no R2 ou no R3, respectivamente) o conjunto imagem de α, que, em geral, será uma curva.



O desenho do conjunto imagem de α é chamado de trajetória ou traço de α. Por isso que também chamamos a função α, de curva.

Exemplos:

a) Desenhe a trajetória da função dada por α(t) = (4t + 2, t + 3)

b) Desenhe a trajetória da função dada por α(t) = (t, t2)

c) Desenhe a trajetória da função dada por α(t) = (cos t, sen t), 0 ≤ t ≤ 2π

d) Desenhe a trajetória da função dada por α(t) = (t cos t, t sen t), t ≥ 0

**Limite**

Sejam α: A ⊂ R −→ Rn em que A é um intervalo ou uma reunião de intervalos, t0 um ponto de A ou extremidade de um dos intervalos que compõem A e L ∈ Rn.

Dizemos que L é o limite de α(t) quando t tende para o t0, e escrevemos,



Então, temos que:



Exemplos:

a) Seja α: R − {1} −→ R3 dada por α(t) = 

Calcule 

b) Seja α: R − {0} −→ R3 definida por α(t) = 

Determine 

**Derivadas Parciais**

Em geral, se f é uma função de duas variáveis x e y, suponha que deixemos somente x variar enquanto mantemos fixo o valor de y, por exemplo, fazendo y = b, onde b é uma constante. Estaremos então considerando, realmente, uma função de uma única variável x, a saber, g(x) = f(x, b). Se g tem derivada em a, nós a chamaremos de derivada parcial de f em relação a x em (a, b) e o denotaremos por fx (a, b). Assim,

fx(a, b) = g’(a) onde g(x) = f(x, b)

Pela definição de derivadas, temos



E assim a equação torna−se



Da mesma forma, a derivada parcial de f em relação a y em (a, b), denotada por fy (a, b), é obtida mantendo-se x fixo (x = a) e determinando-se a derivada em b da função G(y) = f(a, y):



Portanto, se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais são as funções fx e fy, definidas por



**Exemplo**

Em um dia quente, a umidade muito alta aumenta a sensação de calor, ao passo que, se o ar está muito seco, temos a sensação de temperatura mais baixa do que a indicada no termômetro. O Serviço Meteorológico do Canadá introduziu o humidex (ou índice de temperatura−umidade) para descrever os efeitos combinados da temperatura e umidade. O humidex I é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real for T e a umidade relativa for H. Desse modo, I é uma função de T e H e podemos descrever I = f(T, H).

A seguir temos uma parte de uma tabela compilada pelo Serviço Meteorológico com valores de I.



Se nos concentrarmos na coluna assinalada da tabela que corresponde à umidade relativa de H = 60%, estaremos considerando o humidex como uma função de uma única variável T para um valor fixo de H. Vamos escrever g(T) = f(T, 60). Então, g(T) descreve como o humidex I aumenta à medida que a temperatura real T aumenta quando a umidade relativa é de 60%. A derivada de g quando T = 30° C é a taxa de variação de I com relação a T quando T = 30° C :



Por outro lado, se olharmos agora para a linha que corresponde à temperatura fixa de T = 30° C, os números nesta linha são valores da função G(H) = f(30, H), que descreve como o humidex aumenta à medida que a umidade relativa H aumenta quando a temperatura real é T = 30° C. A derivada dessa função quando H = 60% é a taxa de variação de I com relação a T quando H = 60%:



Podemos escrever as taxas de variação do humidex I com relação à temperatura real T e umidade relativa H quando T = 30° C e H = 60% como segue:





**Exemplo:** Se f(x, y) = x3 + x2y3 – 2y2 , encontre fx (2, 1) e fy (2, 1).

**Exercícios**

1) Desenhe a trajetória da função dada por α(t) = (t + 1, 3t − 2)

2) Desenhe a trajetória da função dada por α(t) = (t + 3, t2)

3) Desenhe a trajetória da função dada por α(t) = (2cos t, 2sen t), 0 ≤ t ≤ 2π

4) Se f(x, y) = 4 – x2 – 2y2 , determine fx (1, 1) e fy (1, 1)

5) Encontre fx , fy e fz se f(x, y, z) = ex y2 ln z.

6) Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função f(x, y, z) = x2y – 3xy2 + 2yz.

7) Determine as derivadas parciais de primeira e de segunda ordem da função f(x, y) = x3 + 2y3 + 3x2y2.

8) Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função f(x, y) = (x3 + y2)/(x2 + y2).

9) Se 𝐹 (𝑥, 𝑦) = 𝑥. 𝑠𝑒𝑛 (𝑥2𝑦) , encontre 𝐹𝑥 (𝑥, 𝑦) 𝑒 𝐹𝑦 (𝑥, 𝑦).

10) Se 𝐹 (𝑥, 𝑦) = ln (𝑥 + √𝑥2 + 𝑦2) , 𝑐𝑎𝑙𝑐𝑢𝑙𝑒 𝐹𝑥 (3,4).